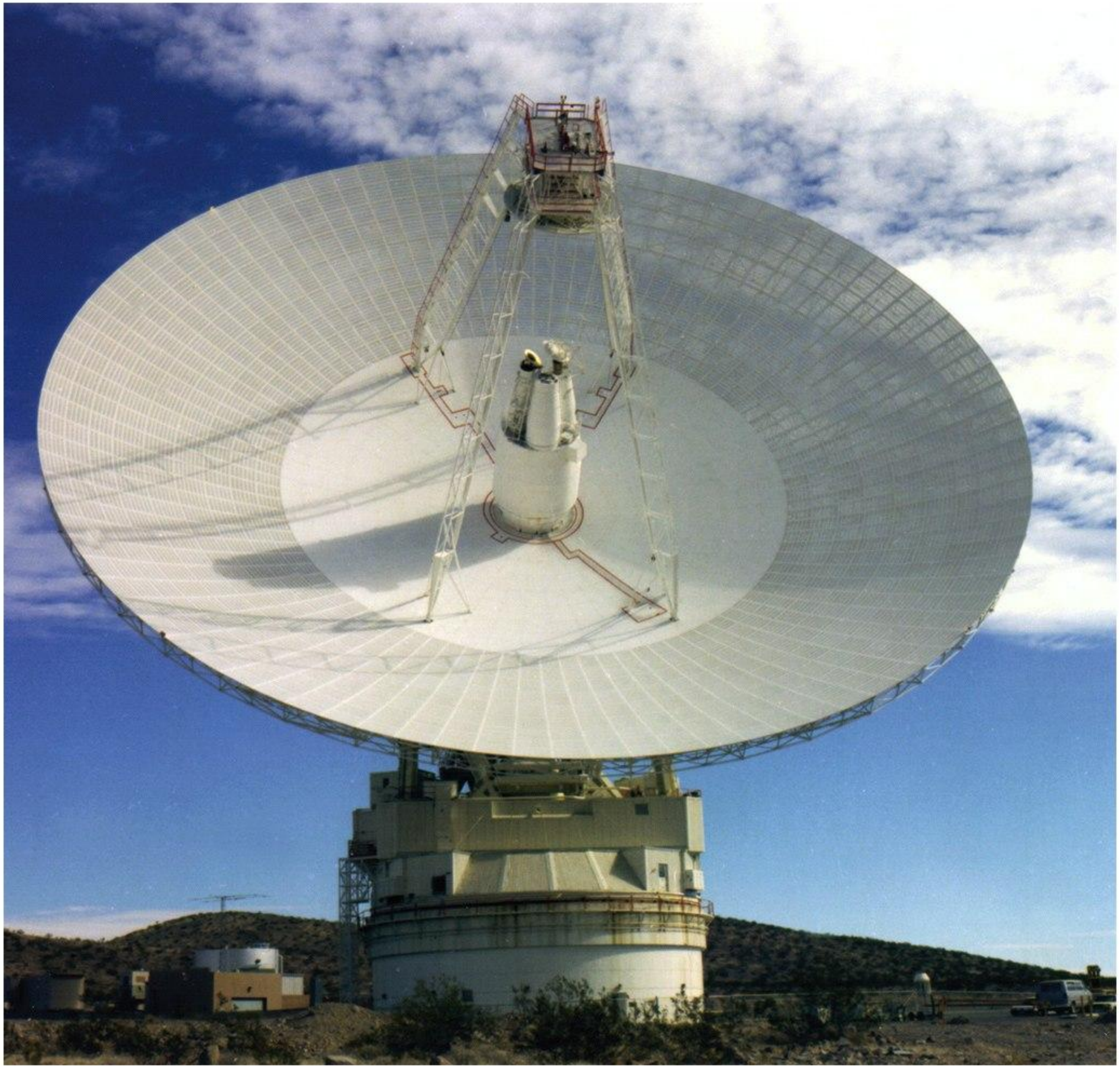
Prof. Maurizio Mattesini

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Capítulo 30

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas



Antena de 70 metros en Goldstone, California. Proporciona comunicación por radio a naves interplanetarias de la NASA. En general viene utilizada para realizar observaciones de radar y radioastronómicas tanto del sistema solar como del propio universo.

Las ecuaciones del físico escocés **James Clerk Maxwell** (1831-1879) desempeñan en el electromagnetismo clásico un papel análogo al de las leyes de Newton en la mecánica clásica.

En principio, pueden resolverse todos los problemas de la electricidad y magnetismo clásicos mediante el empleo de las ecuaciones de Maxwell, de la misma forma que pueden resolverse todos los problemas de la mecánica clásica con las leyes de Newton, aunque su aplicación exige unos conocimientos matemáticos superiores.

Estas leyes relacionan los vectores **E** y **B** con sus fuentes, que son las cargas eléctricas y las corrientes.
Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell resumen las leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo: las leyes de Coulomb, Gauss, Biot-Savart, Ampère y Faraday.

Estas leyes se cumplen de modo general excepto la ley de Ampère, que sólo puede aplicarse a las corrientes estacionarias continuas.

“ [The work of James Clerk Maxwell is] the most profound and the most fruitful that Physics has experienced since the time of Newton. ”

-Albert Einstein, The Sunday Post

Velocidad de las ondas electromagnéticas

Maxwell demostró que estas ecuaciones podían combinarse para originar una ecuación de ondas que debían satisfacer los vectores **E** y **B**. Estas **ondas electromagnéticas**, originadas por cargas eléctricas aceleradas, fueron producida por primera vez en un laboratorio por **Heinrich Hertz** en 1887. **Maxwell** mostró que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el espacio vacío debía ser

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}}$$

VELOCIDAD DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

en donde ε_o, la **permitividad del vacío**, es la constante que aparece en las leyes de Coulomb y de Gauss, mientras que μ_o, la **permeabilidad del vacío**, es la incluida en las leyes de Biot-Savart y de Ampère.

Maxwell se dio cuenta de que la medida de la velocidad de la luz coincidía con el valor de $(\mu_o\varepsilon_o)^{-1/2}$, y **supuso correctamente que la propia luz es una onda electromagnética**.

Actualmente los valores de c, μ_o y ε_o se definen como

$$c = 2.99792458 \times 10^{8}\ m/s$$

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{7}\ N / A^{2}$$

$$\varepsilon_o = 8.854187817 \times 10^{-12}\ C^{2} / \left(N \cdot m^{2}\right)$$

30-1
Corriente de desplazamiento de Maxwell

Es interesante comparar la ecuación de la forma generalizada de la **ley de Ampère** con la ecuación de la **ley de Faraday** para la fem inducida en un campo magnético variable:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_o\left(I + I_d\right) = \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d\phi_e}{dt}}$$

FORMA GENERALIZADA DE LA **LEY DE AMPÈRE**

$$\boxed{\xi = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\int_S \frac{dB_n}{dt}\, dA}$$

LEY DE FARADAY PARA UNA FEM INDUCIDA EN UN CIRCUITO ESTACIONARIO EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE

La modificación de Maxwell de la **ley de Ampère** demuestra que un flujo eléctrico variable produce un campo magnético cuya circulación a lo largo de una curva es proporcional a la variación del flujo eléctrico por unidad de tiempo.

De acuerdo con la **ley de Faraday**, un flujo magnético variable produce un campo eléctrico cuya integral de línea o circulación a lo largo de una curva, es proporcional a la velocidad o ritmo de variación del flujo magnético a través de la curva.

Así pues, tenemos el interesante resultado recíproco de que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (**ley de Faraday**) y que un campo eléctrico variable produce un campo magnético (forma generalizada de la **ley de Ampère**).

30-2
Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones de Maxwell

$$\oint_S E_n \, dA = \frac{1}{\varepsilon_o} Q_{\text{interior}}$$

LEY DE GAUSS: Establece que el flujo del campo **E** a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\varepsilon_o$ veces la carga neta encerrada dentro de la msima. Esta ley implica que el campo **E** debido a una carga puntual varía en razón inversa al cuadrado de la distancia de la carga. La ley de Gauss describe cómo salen las líneas de campo eléctrico de una carga positiva y convergen sobre una carga negativa. Su base experimental la constituye la ley de Coulomb.

$$\oint_S B_n \, dA = 0$$

LEY DE GAUSS DEL MAGNETISMO: Establece que el flujo del vector campo magnético **B** es cero a través *cualquier* superficie cerrada. Esta ecuación describe la observación experimental de que las líneas de campo magnético no divergen de ningún punto del espacio ni convergen sobre ningún otro punto; es decir, esto implica que no existen polos magnéticos aislados.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \int_S B_n \, dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} \, dA$$

LEY DE FARADAY: Afirma que la integral del campo **E** a lo largo de cualquier curva cerrada *C*, que es la fem, es igual a la variación por unidad de tiempo del flujo magnético que atraviesa la superficie *S* limitada por la curva *C*. La ley de Faraday describe cómo las líneas de campo **E** rodean cualquier superficie a través de la cual existe un flujo magnético variable y relaciona el vector campo eléctrico **E** con la variación respecto al tiempo del vector campo magnético **B**.

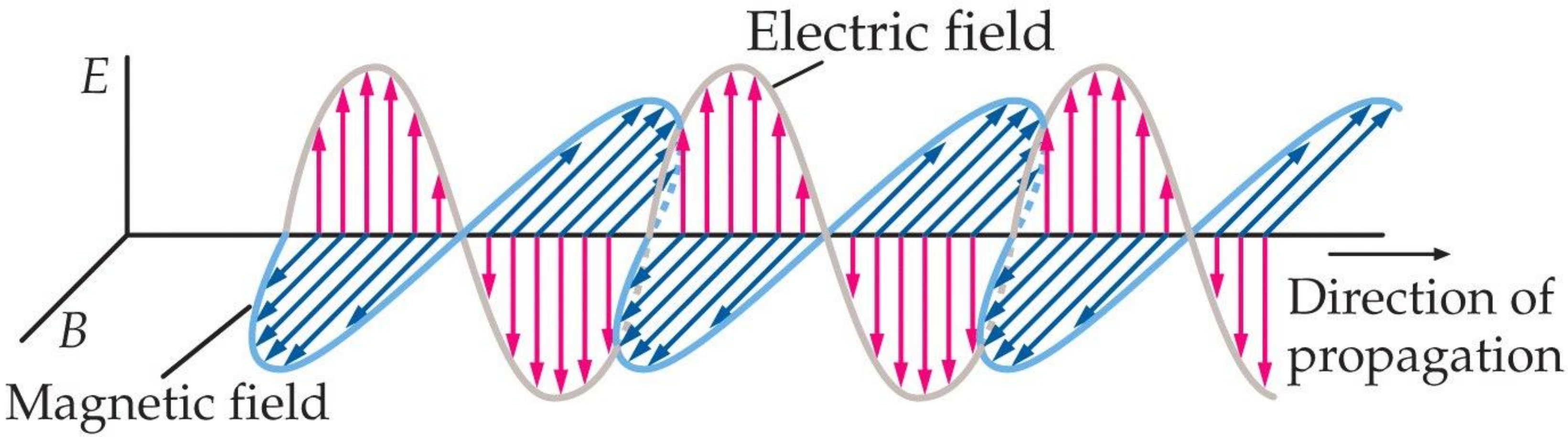
$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell &= \mu_o \left(I + I_d \right) \\ &= \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int_S E_n \, dA \\ &= \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} \, dA\end{aligned}$$

LEY DE AMPÈRE: Establece que la integral de línea del campo **B** a lo largo de cualquier curva cerrada *C* es igual a μ_o multiplicado por la corriente que atraviesa la superficie S limitada por la citada curva más el producto de $\mu_o\varepsilon_o$ por la variación respecto al tiempo del flujo eléctrico que atraviesa la superficie *S*. Esta ley describe cómo las líneas de campo **B** rodean una superficie a través de la cual o bien está pasando corriente, o bien existe un flujo eléctrico variable.

E la sección 30.4 demostraremos cómo las ecuaciones de onda del campo eléctrico **E** y el campo magnético **B** pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell.

30-3
Ondas electromagnéticas

Ondas electromagnéticas



La figura muestra los vectores **E** y **B** de una onda electromagnética. Los campos eléctrico y magnético son ♈ entre sí y ♈ a la dirección de propagación de la onda. Las ondas electromagnéticas son, por lo tanto, **ondas transversales**. Los campos **E** y **B** están en fase, en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo, sus módulos están relacionados por la expresión:

$$E = cB$$

en donde $c=1/(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2}$ es la velocidad de la onda. La dirección de propagación de una onda electromagnética es la dirección del producto vectorial **E**x**B**.

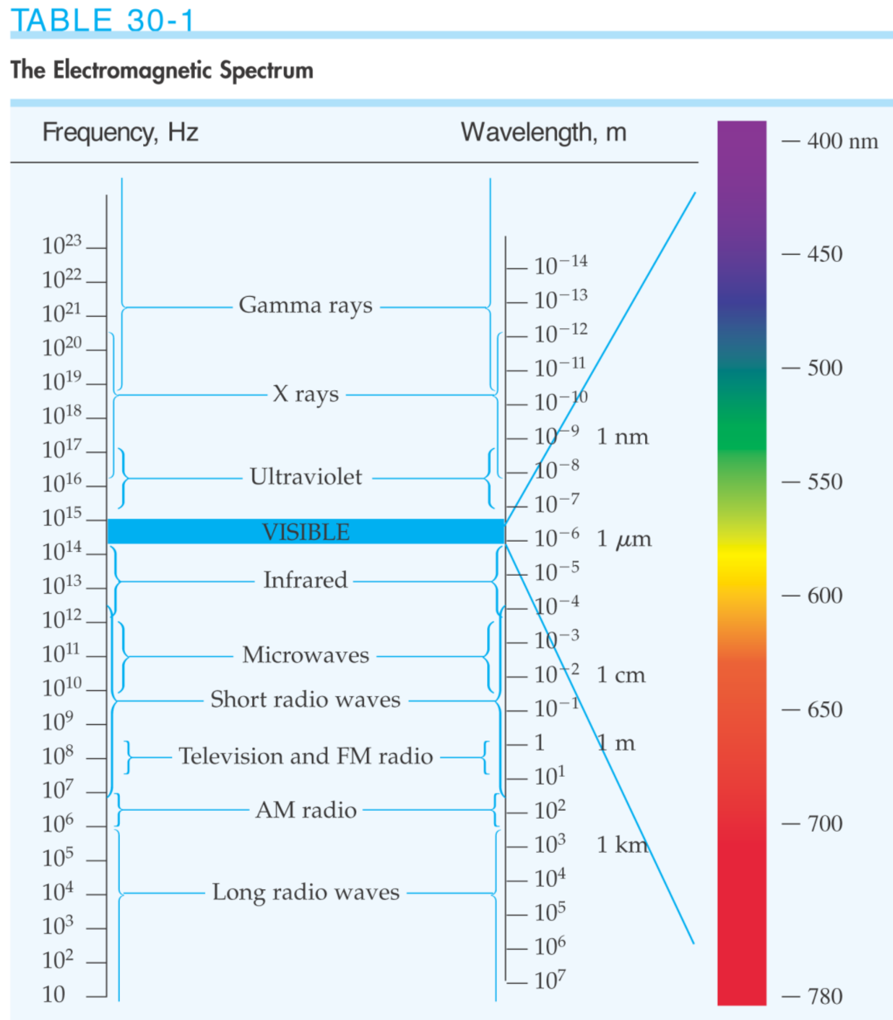
Espectro electromagnético

Los diversos tipos de ondas electromagnéticas- *luz*, *ondas radio*, *rayos X*, *rayos gamma*, *microondas*, etc.-difieren sólo en la **longitud de onda** (λ) y **frecuencia** (***f***), que están relacionadas con la velocidad *c* en la forma usual:

$$f\lambda = c$$

En la Tabla 30-1 se expone el **espectro electromagnético** y los nombres asociados con los diversos intervalos de frecuencia y longitud de onda. Estos intervalos no están a veces bien definidos y frecuentemente se solapan.

Las ondas electromagnéticas se producen cuando se aceleran las cargas eléctricas o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas verifican transiciones a estados de menor energía.



Energía y momento de una onda electromagnética

Como todo tipo de onda, las ondas electromagnéticas transportan energía y momento. La energía transportada viene descrita por la **intensidad**, es decir, por la potencia media por unidad de área incidente sobre una superficie perpendicular a la dirección de propagación. El momento por unidad de tiempo y por unidad de área transportada por una onda electromagnética se denomina **presión de radiación**.

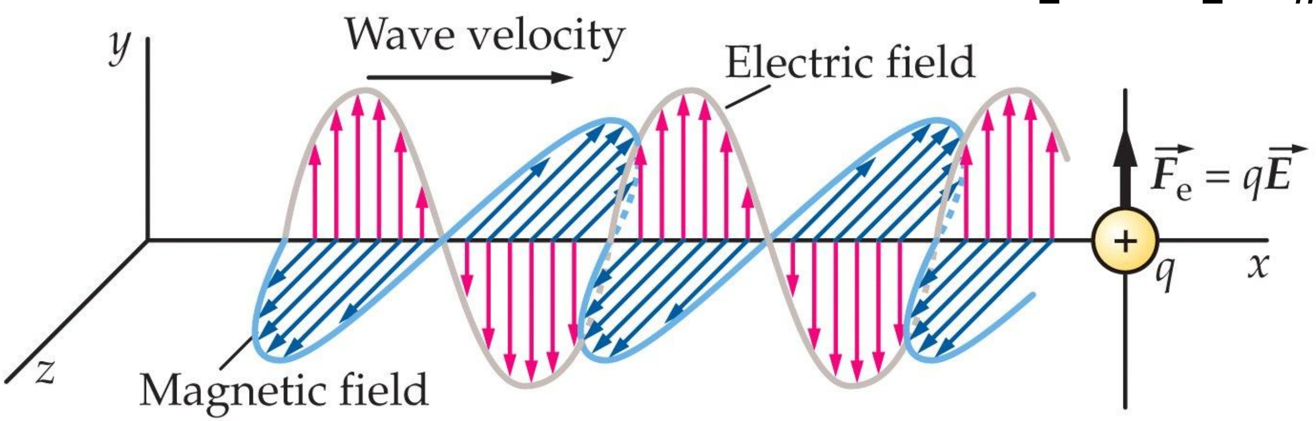
A continuación mostraremos que una onda electromagnética transporta momento. Consideramos una onda que se mueve a lo largo del eje *x* e incide sobre una carga en reposo como indica la figura.

Por sencillez supondremos que **E** se encuentra en la dirección *y* y **B** en la dirección *z* y despreciaremos la dependencia con el tiempo de los campos.
La partícula experimenta una fuerza *q***E** en la dirección *y* y, por lo tanto, es acelerada por el campo eléctrico. En cualquier instante *t*, la velocidad en la dirección *y* es:

$$v_y = at = \frac{F}{m}t = \frac{qE}{m}t$$

Al cabo de un corto tiempo t_1, la carga ha adquirido una energía cinética igual a:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}\frac{mq^2E^2t_1^2}{m^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}t_1^2$$



Al moverse en la dirección *y*, la carga se encuentra una fuerza magnética:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = qv_y\mathbf{j}\times B\mathbf{k} = qv_yB\mathbf{i} = \frac{q^2EB}{m}t\mathbf{i}$$

Obsérvese que esta fuerza se encuentra en la dirección de propagación de la onda. A partir de $dp_x=F_x\,dt$, podemos determinar el momento p_x transferido por la onda a la partícula en el tiempo *t*:

$$p_x = \int_0^{t_1} F_x dt = \int_0^{t_1} \frac{q^2EB}{m} t\, dt = \frac{1}{2}\frac{q^2EB}{m}t_1^2$$

Teniendo en cuenta que $B=E/c$, resulta:

$$p_x = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}t_1^2\right)$$

Comparando esta ecuación con la de la energía cinética, vemos que el momento adquirido por la carga en la dirección de la onda es *1/c* multiplicado por la energía:

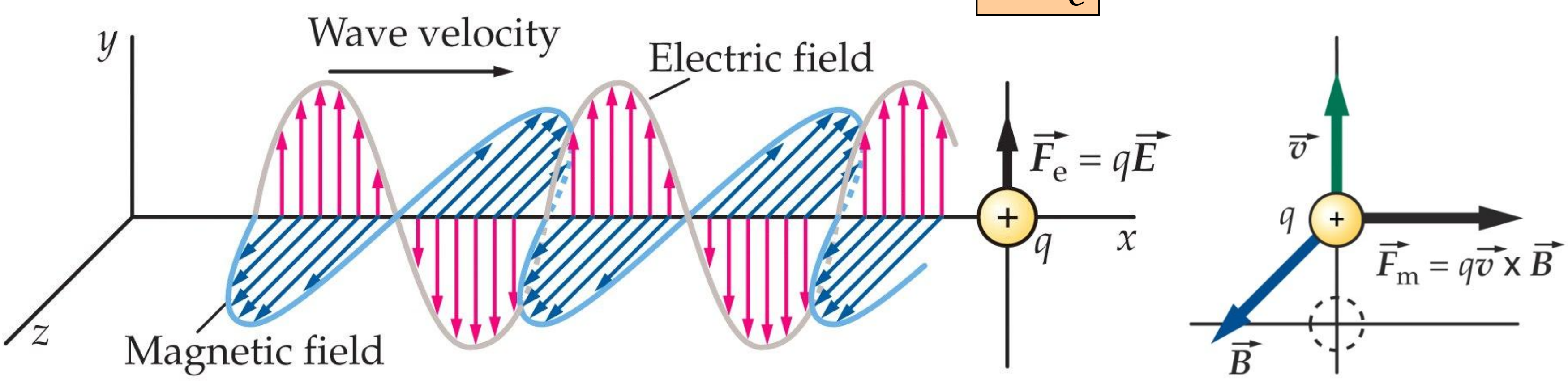
$$\boxed{p = \frac{U}{c}}$$

MOMENTO Y ENERGÍA DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Como la intensidad de una onda es la energía por unidad de tiempo y unidad de área, la intensidad dividida por *c* es el momento transportado por la onda por unidad de tiempo y unidad de área. El momento transportado por unidad de tiempo es una fuerza. La intensidad de onda dividida por *c* es, pues, una fuerza por unidad de área, que resulta ser una presión. Esta presión se denomina **presión de radiación** P_r:

$$\boxed{P_r = \frac{I}{c}}$$

PRESIÓN DE RADIACIÓN E INTENSIDAD



Ecuación de onda

Las ondas en una cuerda obedecen a una ecuación en derivadas parciales llamada **ecuación de onda** (sección 15.1):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

en donde *y(x,t)* es la función de onda, que en el caso de las ondas en una cuerda corresponde al desplazamiento de la cuerda. La velocidad de la onda es $v=(F/\mu)^{1/2}$, siendo *F* la tensión y μ la densidad lineal de masa. La solución general de esta ecuación es

$$y(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Las funciones correspondientes a esta solución general pueden expresarse como una superposición de funciones de **onda armónicas** de la forma

$$y(x,t) = y_o\, sen(kx - \omega t)$$
$$y(x,t) = y_o\, sen(kx + \omega t)$$

en donde $k=2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega=2\pi f$ es la frecuencia angular.

Las ecuaciones de Maxwell implican que tanto **E** como **B** obedecen a ecuaciones de ondas semejantes a la ecuación de onda. Consideremos sólo el vacío, en el cual no hay cargas o corrientes y suponemos que **E** y **B** son funciones del tiempo y de una sola coordenada espacial que tomaremos como coordenada *x*. Una onda de este tipo se llama **onda plana**, porque **E** y **B** son uniformes en todos los puntos de cualquier plano $\perp$ al eje *x*. Para una onda electromagnetica plana que se propaga paralelamente al eje *x,* las componentes *x* de los campos son nulas, de modo que los vectores **E** y **B** son $\perp$ al eje *x* y obedecen respectivamente a las siguentes ecuaciones de onda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

ECUACIÓN DE ONDA PARA **E**

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}}$$

ECUACIÓN DE ONDA PARA **B**

donde $c=(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2}$ es la velocidad de las ondas.